Décomposition polaire

Leçons : 106, 150, 155, 158, 160

Réf. : Caldero, H2G2 p348

Th. :

$$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un homéomorphisme.}$$
$$(O, S) \longmapsto OS$$

1) μ est bien définie (...) et continue (...)

2) Surjectivité de μ

- Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

En effet ${}^tx({}^tMM)x = {}^t(Mx)(Mx) = \|Mx\|_2^2 \geq 0$

et ${}^tx({}^tMM)x = 0 \Leftrightarrow Mx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $M \in GL_n(\mathbb{R})$

- Soient $\lambda_1 \dots \lambda_n$ les vp de ${}^tMM$.

$\forall 1 \leq i \leq n$, $\lambda_i > 0$ et par corollaire du théorème spectral,

$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ / ${}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$.

- On pose $\boxed{S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}} = P \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i}) P^{-1}$

Alors $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $P \in O_n(\mathbb{R})$

et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car ses vp. sont > 0.

- On pose $\boxed{O = MS^{-1}}$

${}^tOO = {}^tS^{-1}({}^tMM)S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$ $\quad ({}^tS^{-1} = S^{-1})$

donc $O \in O_n(\mathbb{R})$

Enfin, $\boxed{M = OS}$ donc μ est surjective

3) Injectivité de μ

On suppose que $M = OS = O'S'$ où $O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On a alors $\boxed{S^2 = {}^tMM = {}^t\underbrace{S'}_{=S}(\underbrace{{}^tO'O'}_{=I_n})S' = S'^2}$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$

Alors $S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = P\, Q\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) P^{-1}$

$(PMP^{-1})^k = PM^kP^{-1}$

$= Q\left(P \operatorname{diag}(\lambda_i) P^{-1}\right)$

$= Q(S^2)$

$S = Q(S'^2)$

Or S' commute avec S'^2 donc S' et S commutent.

S et S' étant symétriques donc diagonalisables, en notant $\mu_1 \dots \mu_n$ les vp de S', il existe $P_0 \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$S' = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i) P_0^{-1} \qquad S = P_0 \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_i}) P_0^{-1}$

et $S'^2 = S^2$ donc $P_0 \operatorname{diag}(\mu_i^2) P_0^{-1} = P_0 \operatorname{diag}(\lambda_i) P_0^{-1}$

donc $\forall\, 1 \leq i \leq n,\ \mu_i^2 = \lambda_i$ $\quad \mu_i, \lambda_i > 0$

donc $\forall\, 1 \leq i \leq n,\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$

donc $S' = S$, et alors $O' = O$ et $\boxed{\mu \text{ est injective.}}$

4) Continuité de μ^{-1} par caractérisation séquentielle

Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M$

On écrit $M = OS$ et $M_p = O_p S_p$ où $O, O_p \in O_n(\mathbb{R})$ et $S, S_p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Mq $O_p \xrightarrow[p]{} O$ et $S_p \xrightarrow[p]{} S$

Par hypothèse, $O_p S_p \longrightarrow OS$

G Déc Po 2

$(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de $O_n(\mathbb{R})$ compact.

Soit $\overline{O}$ une valeur d'adhérence et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement $\nearrow$ tq $O_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to\infty]{} \overline{O}$ $\quad (\overline{O} \in O_n(\mathbb{R}))$

$S_{\varphi(p)} = O_{\varphi(p)}^{-1} \Pi_{\varphi(p)}$ donc par continuité de $A \mapsto A^{-1}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$

$\boxed{S_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \overline{O}^{-1}\Pi = \overline{S}}$

Or, $\overline{S} \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ car $S_{\varphi(p)} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\overline{S} \in GL_n(\mathbb{R})$ car $\overline{O}^{-1}, \Pi \in GL_n(\mathbb{R})$.

donc $\boxed{\overline{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

On a alors $\Pi = \overline{O}\,\overline{S} = OS$ donc par injectivité de μ, $\boxed{\overline{O} = O}$ et $\boxed{\overline{S} = S}$

$(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de $O_n(\mathbb{R})$ compact admettant une unique valeur d'adhérence

donc $O_p \xrightarrow[p]{} O$ et par conséquent $S_p \xrightarrow[p]{} S$

donc $\boxed{\mu^{-1} \text{ est continue}}$

$\boxed{\mu \text{ est bien un homéomorphisme.}}$